LINALG

Simone Goggiori
Zusammenfassung 2015

1 MATRIZEN

$$A^{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \} m \text{ (row, zeile)}$$

n (column, spalte)

Mögliche eigenschaften von Matrizen

symmetrisch $A = A^T$ ($\Rightarrow m=n$)
hermitesch $A = A^H$, A gleich ihrer konjugiert komplexen transponierten
positiv definit $\forall x: \boxed{x^H A x > 0}$ Matrix positiv def $\Leftrightarrow \exists$ cholesky zerlegung ($x \neq 0$, A symmetrisch/hermitesch)
positiv semidefinit $x^H A x \geq 0$ (x darf 0 sein)
orthogonal (unitär $\mathbb{C}$) $A A^T = I \rightarrow A^{-1} = A^T$
A,B kommutieren $A \cdot B = B \cdot A$

transposed of matrix

- Normalfall A^T zeilen und spalten vertauschen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
- A besitzt komplex Einträge
Hat A komplexe einträge, befindet von $B = A^T$ als die nxm matrix mit $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ($a+ib = a-ib$)
$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+i & 1+i \end{pmatrix}$$

lineare gleichungssysteme (LGS)

$Ax = b$ Lösung: $x = A^{-1} \cdot b$
$\rightarrow m$ Gleichungen, n unbekannte

Rang anzahl der linear unabhängige Vektoren der matrix (entspricht anzahl der zeilen $\neq 0$ der matrix in Stufenform)

alle vektoren unabhängig $\Rightarrow$ rang vollständig, Matrix regulär, $m=n$ (solo se consideri quelle quadrate)
sonst, matrix singulär

homogen
$Ax = 0$ (rechte seite $= 0$)

Lösungen von LGS

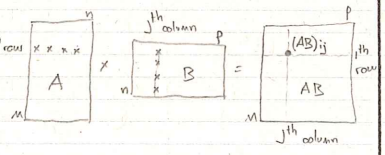
$Ax = b$ has
- exactly 1 solution $\Leftrightarrow$ $r = m = n$ or
if not met, 0 solutions $\leftarrow$ $\begin{cases} r = n < m \text{ and} \\ c_{r+1} = \cdots = c_m = 0 \end{cases}$
- für jedes b min 1 lösung $\Leftrightarrow$ $r = (m)$ it's the important one
- can have 0 lösung $\Leftrightarrow$ $r < m$

free factors

Rechnen mit matrizen

Multiplication
matrix dimension: $m \times n \cdot n \times p = m \times p$

Alg: von multphziet alle $A_{i,:}$ mit den zugehörigen $B_{:,j}$ und addiert jeweils die resultate $\Rightarrow$ ergibt $(AB)_{ij}$



$$\boxed{(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

$$A \cdot B^T = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j^T \quad \text{or} \quad (A^T B)_{ij} = a_i^T b_j \quad \text{where } a_j \text{ is the } j^{th} \text{ column-vektor in } A$$

Properties

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
$A+B = B+A$
$A(B+C) = (AB)+(AC)$
$(A+B)^H = A^H + B^H$
$(AB)^H = B^H A^H$

in general, $AB \neq BA$ (when they do, AB commutes)
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$
$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$

$A+(B+C) = (A+B)+C$
$A+0 = A$
$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

$1A = A$
$A+(-A) = 0$
$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$A(BC) = (AB)C$
$(\alpha A)^H = \alpha A^H$

Inverse of matrix

A^{-1} = inverse von A $\quad \boxed{A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A}$

A invertierbar $\Leftrightarrow$ A regular

rules:
$(A^{-1})^{-1} = A$ (& see previous properties)

Gauss-Jordan Alg:

Anwendung: Berechnung der Inversen und Lösen von LGS

to compute inverse: put the matrix next to the identity. apply gauss-jordan to transform A into I. in the end, A^{-1} will appear
$\boxed{[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]}$
$A \rightarrow I$ $\quad I \rightarrow A^{-1}$

inverse of 2x2

triangular matrix
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ with $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$
then $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}$

general case
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ if $\det(A) \neq 0$ ($a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$)
$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

flip, $\cdot(-1)$ what's not on diagonal

Geschlossene form

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T}$ where $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$
A_{ij}: A without row i col j

Norms

1-norm (Manhattan norm) (somma della differenza coordinate)
$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

2-norm (Euclid's norm, Standard norm)
$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x^H \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

p-norm
$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

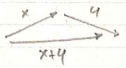
∞-norm
$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Eigenschaften der Norm/Skalarprodukt

- Positiv definit $\|x\| \geq 0$
$\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- Symmetrisch $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
- Linear
$\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

Schwarz'sche Ungleichung
$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
$= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi$

Dreiecksungleichung
$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$



Skalarprodukt

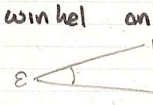
Skalarprodukt, inneres Produkt
$\langle x,y \rangle = x^H y \rightarrow \mathbb{N}$

eigenschaften
$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$
$\langle x,x \rangle \geq 0$
$\langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
$\langle \alpha x + z, y \rangle = \overline{\alpha} \langle x,y \rangle + \langle z,y \rangle$

Winkel zwischen zwei vektoren

$\langle x,y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha$, wobei $\alpha = \sphericalangle(x,y)$
$\langle x,y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$

winkel an einem punkt



der winkel zwischen $\sphericalangle AEB$ is definiert als der winkel zwischen v_1 and v_2, wobei
$v_1 = A - E$ $\quad v_2 = B - E$

winkel in $\mathbb{C}$

$\boxed{\cos(\phi) = \frac{\text{Re}\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}}$

Äussees Produkt

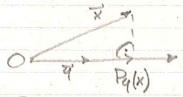
$xy^H \longrightarrow$ out = matrix rang 1

Orthogonale projection

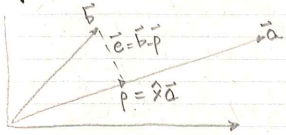
Projection $P_y(x)$ des vectors $\vec{x}$ auf die gerade y durch Ursprung O

$P_y(x) = \frac{1}{\|y\|^2} \cdot yy^H x = uu^H x$ wobei $\vec{u} = \frac{\vec{y}}{\|y\|}$

(ist ein vielfaches von y)



my version



$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a}$

PROOF

$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} - \hat{x}\vec{a}) = 0 \end{cases}$

A is subspace

$\hat{x} = \frac{A^T b}{A^T A}$

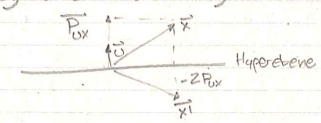
$p = A\hat{x} = A(A^TA)^{-1}A^T \cdot b = Pb$

Householder - Spiegelung

Spiegelung an Hyper-spiegelebene (geg durch dazu orthogonal (einheits) vektor $\vec{u}$)

$H_u = I - 2 \cdot uu^H$

2 Projections



to find $\vec{x'} = H_u \cdot \vec{x}$

Orthogonale / Unitäre Matrizen

Orthogonal in $\mathbb{R}$, unitär in $\mathbb{C}$ $(\mathbb{E} = \mathbb{R} + \mathbb{C})$

$A^H \cdot A = I \Rightarrow A^{-1} = A^H$

properties

A unitär $\leftrightarrow$ A^{-1} unitär

A, B unitär $\leftrightarrow$ AB unitär

Abbildungen mit A:

$\|Ax\| = \|x\|$ längentreu

$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ winkeltreu

(no change in length/angle)

2 ZERLEGUNGEN

LR-Zerlegung (LU): Wie gauss algorithmus. Zusätzlich werden die faktoren, die nötig waren um das Element an diese Stelle zu eliminieren, in einer matrix L gespeichert, wobei $l_{jj} = 1$.
Der faktor f bedeutet dann, dass die pivot zeile im Eliminationsschritt mit f multipliziert und von der aktuellen Zeilen subtrahiert wird.

Damit erhalten wir $PA = LR$ wobei P die permutationsmatrix ist, die die Zeilenvertauschungen mitführt.

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{gauss} \\ 0 \end{pmatrix}$

L R

⚠ remember: coefficients in L are multiplied by (-1)

es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LR$

anderl gegenüber Gauss:
b is not modified → so you can change it and easily compute the new x

LSG aus LR lösen

$Ax = b$ $\quad PA = LU$

$LUx = Pb$

1) solve $Ly = Pb$ (forward substitution)

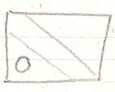
2) solve $Ux = y$ (backward ")

Cholesky zerlegung (decomposition)

Berechne $\hat{R}$ mit $A = \hat{R}^H \hat{R}$

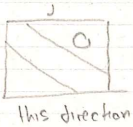
A muss spd sein (symmetrisch und pos def)

$r_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } j < i \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2} & \text{für } j = i \\ \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right) & \text{für } j > i \end{cases}$



wiki $A = LL^H$

$l_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) & \text{für } j < i \\ \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} & j = i \\ 0 & j > i \end{cases}$



compute in this direction →

es $\begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 6 & 1 & \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{pmatrix}$

A L L^H

LDL decomposition

$A = LDL^H = LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}H} L^H = LD^{\frac{1}{2}} \cdot (LD^{\frac{1}{2}})^H$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D_j = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 D_k$

$l_{ij} = \frac{1}{D_j} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}^H D_k \right)$ for $i > j$

↑H (the second term)

⚠ if complex hermitian A,

order of computation: you must be done with the l in a row to compute diagonal → →

Anwendungen

spd-test: Wenn nicht spd, bricht Chol ab

LSG-lösen: schneller als LR, geht aber nur wenn spd

VEKTORRÄUME

Vektorraum: ein körper, mit Vektoren als elemente der Vektoraddition ⊕ und der skalaren multiplication ⊙

Axiome des Vektorraumes

V1	$x + y = y + x$	commutativ	⊕
V2	$(x+y)+z = x+(y+z)$	assoziativ	⊕
V3	$\exists$ element $0 \in V$ für das gilt $x + 0 = x$		NE ⊕
V4	$\forall x \in V \quad \exists -x \in V$ (für das gilt $x + (-x) = 0$)		IE ⊕
V5	$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$	distributiv	⊙
V6	$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$	distributiv	⊙
V7	$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$	assoziativ	⊙
V8	$1x = x$		⊙

⚠ check for all these properties with custom defined ⊕ and ⊙. If they all hold, then they are VR on defined set.

Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein unterraum, wenn

$\forall x, y \in U$ und $\alpha \in \mathbb{E}$: $\quad x + y \in U$ (linearität) $\quad \alpha x \in U$

(le operazioni li fanno rimanere all'interno dell'unterraum)

⚠ spesso, se unisci 2 UR, il risultato non è UR

es. Unterraum di V: V, $\{0\}$, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \oplus U_2$ ($U_{1,2}$ UR di V)

↳ non è l'unione, ma la somma di tutti

$P_0 \subset P_n \subset P_\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^n(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$

P_n: polynom with max degree n $\quad C^n$: all functions derivables at least n times

Erzeugendsystem

spannt einen VR auf $\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Basis

Lineares unabhängiges Erzeugendensystem

Linearkombination

Jeder vektor x ist als Linearkombination darstellbar:

$\beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n = x$

Linear unabhängig

eine Menge von vektoren ist linear unabhängig, wenn kein Vektor eine Linearkombination der Anderen ist.

(test mit Gauss, or find multiple of another)

$Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = \vec{0}$.

Basiswechsel

transformationsmatrix: führt den Wechsel zwischen zwei basen B und B' durch. ξ ist der Koordinatenvektor vom $\vec{x}$ bzgl. der basis B.

Jeder vektor in der neuen Basis lässt sich als lineare kombination der alten basis schreiben

$$b'_k = \sum_{i=1}^{n} T_{ik} \cdot b_i \qquad \text{wir setzen} \quad T = (T_{ik})_{ik=1}^{n}$$

$B' = BT$ $\quad$ T transformationsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -8 & -27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{D}_3$ $\xrightarrow{\{1, t, t^2, t^3\}}$ $\mathbb{R}^4$ $\{m_0, m_1, m_2, m_3\}$

P^{-1}, P, Q, Q^{-1}, T^{-1}, $T = Q^{-1}P$

$\mathbb{R}^4$ $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$

$p_0(x) = 1^3$
$p_1(x) = (1-1)^3$
$p_2(x) = (1-2)^3$
$p_3(x) = (1-3)^3$

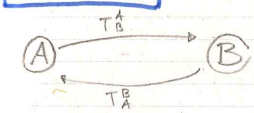
$\mathbb{R}^4$ $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$q_0(x) = 1$
$q_1(x) = 1 + t$
$q_2(x) = 1 + t + t^2$
$q_3(x) = 1 + t + t^2 + t^3$

$\mathbb{R}^4$: they all design the same space (expressed in different ways)

$$\rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$T^{\text{von}}_{\text{nach}}$ $\quad$ $T^A_A = I$ $\quad$ $T^B_A = (T^A_B)^{-1}$



$$[B \mid A] \xrightarrow{\text{gauss}} [I \mid T^A_B]$$

Formeln

$\xi' = T^{-1} \cdot \xi$ $\quad$ $\xi = T \cdot \xi'$

$B' = BT$ $\quad$ $B = B' \cdot T^{-1}$

$B \cdot \xi = x = B' \cdot \xi'$

- $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_i \vec{b}_i$

λ_i : coord in $A = (a_1 | \dots | a_n)$

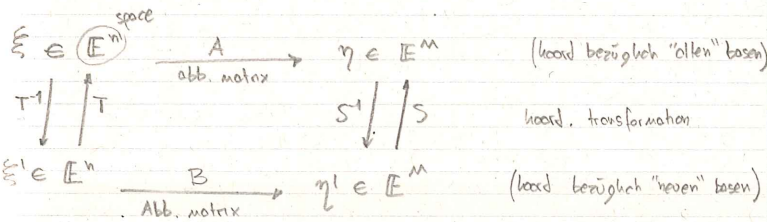
μ_i : " $B = (b_1 | \dots | b_n)$

Standardbasis II (identity)

Ist $B = I$ standardbasis, so gilt $B' = B \cdot T = I \cdot T \rightarrow T = B'$

Abbildung A in sich

bei zwei Abbildungen A und B : $A = SBT^{-1}$ $\quad$ $B = S^{-1}AT$



example: how to convert bases & stuff

riempici una per una le basi nella abbildung, ignorando le altre, e trova il valore per quella colonna

es. $\mathcal{P}_3$: pol grado ≤ 3 $\quad$ $F: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$: $p(x) \rightarrow \boxed{x \cdot p'(x) - p(x)}$

1) prove lin. abbildung $\quad F(a+b) = F(a) + F(b)$

$$F(p_1(x) + p_2(x)) = x\,(p_1(x) + p_2(x))' - (p_1(x) + p_2(x)) = \dots = (x p_1'(x) - p_1(x)) + (x p_2'(x) - p_2(x)) \quad \square$$

$F(\alpha a) = \alpha F(a)$ $\quad \dots$

2) $\left[F(1)\right]_{B_1} = \left[-1\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\left[F(x)\right]_{B_1} = \left[0\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left[F(x^2)\right]_{B_1} = \left[x^2\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\left[F(x^3)\right]_{B_1} = \left[2x^3\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A = [F]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\{1-x,\ x,\ x^2+x,\ x^3-1\}$

$\left[F(1-x)\right]_B = \dots = \left[-1\right]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\left[F(x)\right]_B = \dots = \left[0\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left[F(x^2+x)\right]_B = \dots = \left[x^2\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\left[F(x^3-1)\right]_B = \dots = \left[2x^3+1\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

To find complex lin. comb:
basis expression $\quad k_1(1-x) + k_2(x) + k_3(x^2+x) + k_4(x^3-1) \overset{!}{=} -1$ $\quad$ → vo cercando falle corrispondenze a -1
simplified $\quad 1\,(k_1 - k_4) + x\,(k_2 + k_3 - k_1) + x^2(k_3) + x^3(k_4) \doteq -1$

→

eg. sist $\begin{cases} k_1 - k_4 = -1 \\ -k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$

4 LINEARE ABBILDUNGEN

Abbildung $F: X \rightarrow Y$ ist eine abbildung

X ist der **definitionsbereich** $\quad \text{dom}(F)$

Y **zielbereich** $\quad$ range(F)

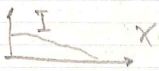
all the reachable values in Y are the **image** $\quad \text{Im}(F)$ = column space

injektiv Jedes element Zielbereich **höchstens** 1 mal

$\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

surjektiv Jedes element Zielbereich **mindestens** 1 mal

$\forall y \in Y \ \exists x \in X: f(x) = y$



bijektiv / isomorph jedes element zielbereich **genau** 1 mal (surj + inj)

Ist eine abbildung F bijektiv, dann gibt es eine inverse abbildung F^{-1}

Zusammengesetzte abbildungen

$$\boxed{G \circ F(x) = G(F(x)) = G.F.x}$$

Lineare abbildung

eine abbildung ist linear, falls

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ F(x+y) = F(x) + F(y) \\ 2.\ F(\alpha x) = \alpha F(x) \end{array}}$$

(oder $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$)

se trovi la matrice $m \times n$ che fa l'abbildung $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, hai dimostrato che è lineare $(x \rightarrow Ax)$

sistema di risoluzione:

Wichtige lin. abbildungen

C^n (classe) rappresenta una mind. n-mal ableitbare Funktion f

Ableitungsoperator $D: C^1 \rightarrow C$, $f \mapsto f'$

Differentialoperator $L: C^n \rightarrow C$, $f \mapsto c_n f^{(n)} + c_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + c_1 f' + c_0 f$

Evaluationsabb. t fest, $\mathcal{E}_t: C \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \mathcal{E}_t f := f(t)$

Mult'op. $M: C \rightarrow C$, $f \mapsto g$ wo $g(t) := t \cdot f(t)$

es $F = M \circ D + \mathcal{E}_2$ $\quad F: C^1 \rightarrow C$, $f \mapsto t f'(t) + f(2)$

Affine abbildung Eine affine abbildung ist eine abbildung verknüpft mit eine Translation

$H: X \rightarrow u_0 + Y$, $x \mapsto u_0 + Fx$ $\quad$ (mit F lin. abb)

Kern, Bild

Kern = die menge der vektoren $x \in \text{dom}(F)$ für die gilt:

$Fx = 0$

mit A lin.abb, $\boxed{\text{kern}(A) = N(A) = \text{nullraum}}$

F injektiv $\Leftrightarrow$ $\text{kern}(F) = 0$

Basis des Kerns von A

1) Reduziere A auf zeilenstufenform
2) löse $Ax = 0$
3) wähle in x jeweils einen der freien parameter 1 und die anderen 0. Die dadurch gewonnenen vektoren x_i sind die basisvektoren des kerns

es: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{gauss}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ↑ free param ↑

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -11/9\,t \\ 2/3\,t \\ t \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$

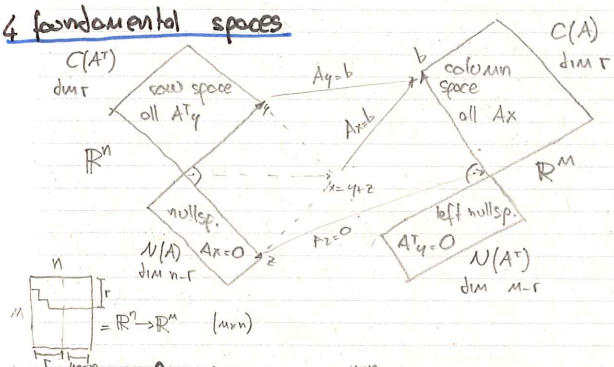
Bild = menge des rechten seiten b für die $Ax = b$ eine lösung hat

mit A lin. abb, $\boxed{\text{Im}(A) = R(A) = \text{kolonnenraum}}$

Basis des bildes von A

1. Reduziere A^T auf zeilenstufenform
2. Die Kolonnen, bei denen das pivotelement $\neq 0$ ist, sind de pivotkolonnen. Somit sind diesen Kolonnen in der Ursprünglichen matrix A basisvektoren des kolonnenraums, also des bildes von A

4 foundamental spaces



Dimensionsformel

$A^{m\times n}$ $\quad X \to Y$

$\dim X = n$ = # basis vekt
$\dim \operatorname{Im} A = r$ = Rang (A)
$\dim \operatorname{Kern} A = n-r$ = # free param

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\dim X = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Kern}(A)}\\ n = r + (n-r)\end{array}\right\}$$

Orthonormal basen

Basis orthogonal alle vektoren paarweise orthogonal ($\perp$)

Basis orthonormal " + alle haben länge 1 ($\|\cdot\| = 1$)

Gram-Schmidt Orthogonalisierung

idee: ziehen von jeder parte parallele alle alle basi, per normalizza

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig vektoren (alle basis)

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{b}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\|a_1\|} & \vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{b}_j, \vec{a}_k \rangle \cdot \vec{b}_j \\ & \vec{b}_k = \dfrac{\vec{b}_k}{\|b_k\|} \end{array}\right\} k = 2, \dots, n$$

$b_1, \dots, b_n$ paarweise orthonormale vektoren (neue basis)

⚠ normalizza sobla!

Normen von lin. abb und Matrizen

Matrix norm

$$\|\cdot\| : \mathcal{E}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

properties:

positiv definit $\|F\| \geq 0$ $\quad \|F\| = 0 \Leftrightarrow F = 0$

homogen $\|\alpha F\| = |\alpha| \|F\|$

dreiecksungleichung $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$

zusammengesetzte abb. $\|F \circ G\| = \|F \cdot G\| \leq \|F\| \cdot \|G\|$

kompatibel mit vektornorm $\|Fx\|_y \leq \|F\| \|x\|_x$

my part:

$\|A\|_{\varepsilon=\text{euclidian}} = \sqrt{\sum\sum a_{ij}^2}$ (sum all elements squared)

$\|A\|_\infty$ = maximum absolute row sum

$\|A\|_1$ = 1-norm of A: sum elements (abs) in each column, then pick max

ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \|A\|_1 = 10$

Spektralnorm:

$$\|A\|_2 := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

with diagonal matrix D: $\quad \|D\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} = \max_{1\leq k\leq n} |d_{kk}|^2$

Q orthogonal: $\|Q\|_2 = 1$

it follows: $\rightarrow \|A\|_2 = \max\{\sqrt{\omega}\,;\ \omega \text{ eigenwert von } A^H A\} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$

$= \max\{|\omega|\,;\ \omega \text{ singular value von } A\} = \sigma_{max}(A)$

$\|A^{-1}\|_2 = \max\{\frac{1}{|\omega|}\,;\ \omega \text{ " "}\}$

Frobeniusnorm:

(= euclidnorm)

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{trace}(AA^H)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}$$

Konditionszahl

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

2-norm konditionszahl

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$ with $\sigma_1 = \max_{SW}\{\text{EW}(A)\}$, $\sigma_n = \min_{SW}\{\text{EW}(A)\setminus 0\}$

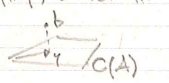
5 METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

Die methode der kleinsten Quadrate löst überbestimmte (overdetermined) LGS, welche im allgemeinen keine lösung haben.
Wir wollen eine gute Näherung (Approximation). Dazu minimieren wir die länge des residuenvektors des gleichungsystem $A\hat{x} = b$
Dabei ist zu beachten, dass eine orthogonal projection auf die durch $A^H A$ aufgespannte Ebene ausgeführt wird.

Residuevektor

$r := y - A\hat{x}$
$= A\hat{x} \perp b$

$Ax = b$ (imp, b not in col. space)
$A\hat{x} = y$



normalengleichung

falls die kolonnen von A lin. unabhängig sind, ist r minimal wenn

$$\boxed{A^H A\hat{x} = A^H b} \Rightarrow \hat{x} = (A^H A)^{-1} A^H b$$

(if $Ax=b$ has no solution, multiply by A^H (or A^T) and solve the new eq.

QR Zerlegung

$A = QR$, Q orthonormal

1) get Q by using gram-schmidt $\boxed{(Q = B_{\text{gram-schmidt}})}$
2) compute R $\quad Q^T A = \underbrace{Q^T Q}_{I} R = R \Rightarrow \boxed{R = Q^T A}$

$r_{11} = \|a_1\|$

$r_{ij} = \langle b_i, a_j \rangle$ $\quad (i = 1, \dots, j-1)\}\ j = 2, \dots, n$

$r_{jj} = \|b_k\|$

⚠ im not sure about this

solving kleinsten quadrat mit QR

$\boxed{Rx = Q^H b}$

example

& with SVD

if $A = U\Sigma V^T$, then $\boxed{x = A^+ b}$, find: pseudoinverse $\boxed{A^+ = V\Sigma^+ U^T}$

↳ es ist rectangular diag matrix Σ, alle non zeros am diagonal and do $\frac{1}{x}$, then transpose.

modified gram-schmidt alg with column-pivots

idee: vertauschen den Pivotkolonnen mit den Nullkolonne, wenn $\text{Rang}(A^{m\times n}) < n$

$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

$\tilde{q}_i = a_i - q_1 \langle q_1, a_i \rangle$ $\quad (i = 2, \dots, n)$

wähle $p \geq k$ mit $\|\tilde{q}_p\| \neq 0$ und vertausche kolonnen p und k. berechne

$q_k = \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|}$

$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i - q_k \langle q_k, \tilde{q}_i \rangle$ $\quad (i = k+1, \dots, n)$

ist $\|\tilde{q}_{k+1}\| = \dots = \|q_n\| = 0$, dann gilt $\text{Rang}(A) = k$ und man ist fertig

$\}\ k = 2, \dots, n$

6 DETERMINANTEN

Determinante: zeigt an, ob ein Gleichungsystem eindeutig (univocamente) lösbar ist oder nicht

Regel von sarus:

2x2

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

3x3

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Det für nxn matrix A

es gilt: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang } A = n \Leftrightarrow A$ ist regulär

$$\boxed{\det A = (-1)^v \cdot \prod_{k=1}^{n} r_{kk}}$$ with v = # row exchanges, r_{kk} = Pivotelement der reduzierten matrix A

⚠ det is defined only on nxn matrices

Entwicklung nach Zeilen und Kolonnen

Untermatrix $A_{[i,j]}$ erhält man durch streichen der Zeile i / Kolonne j von A

kofaktor $k_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det A_{[i,j]}$

Jetzt gilt für jede $n \times n$ matrix A für jede feste i oder j

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} k_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} k_{kj}$$

(row fix / col fix)

es $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

(Laplacher entwicklung)

for bigger matrices, simply use recursively!

Determinante einer Dreiecksmatrix

Die det einer Dreiecksmatrix ist gleich dem produkt der determinanten der diagonalblock matrizen

$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A \cdot \det D$ (links block dreiecksmatrix analog)

for a normal matrix, simply multiply the elements on the diagonal (in Δ form) to find the determinant.

Eigenschaften

- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$
- werden k zeilen (oder spalten) mit α multipliziert, $\rightarrow \det(A') = \alpha^k \det(A)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$
- $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$
- null zeile / nullkolonne $\Longrightarrow \det(A) = 0$
- $\det(A)$ unverändert, wenn man zu einer zeile ein vielfaches einer anderen zeile addiert
- Rang $(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$
- sind A und B ähnlich (sim), d.h. existiert X s.d. $A = X^{-1} B X$, dann gilt: $\det(A) = \det(B)$

- any single exchange of two rows or two columns change the sign of the determinant. multiply det by $(-1)^k$, k = # permutations

Cramer'sche Regel

Lösen ein LGS mit determinanten $Ax = b$

$$x_i := \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i := matrix A with ith column replaced by b

7 EIGENWERTE

Betrachte die abbildung $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Eigenvektoren EV

$\vec{x}$ ist EV von A, wenn es durch multiplikation mit A nur um einen wert λ gestreckt (allenfalls) wird

$\longrightarrow$ die EV einer matrix sind lin. unabhängig.

Eigenwerte EW

λ heisst EW der Abbildung A. Es ist den wert, um dem $\vec{x}$ gestreckt wird.

$\longrightarrow$ **EW sind diagonalelemente**

sei A eine Δ-Matrix (triangular) $\longrightarrow$ die diagonalelemente sind EW

Spektrum $\sigma(A) :=$ die menge der EW von A

Eigenraum ER ist λ EW, so ist der zugehörige Eigenraum $\mathcal{E}_\lambda$ gleich der um den Nullvektor erweiterten (evtesa) Menge der EV zu λ

$\rightarrow \mathcal{E}_\lambda := \{ v \in V : Av = \lambda v \}$

geometrische Vielfachheit (multiplicity)

Die geom. vielfachheit eines EW λ ist gleich $\dim(\mathcal{E}_\lambda)$, also die Anzahl EV von λ (la dimensione del sottospazio)

$\rightarrow \dim \mathcal{E}_\lambda = \dim(\ker(A - \lambda I)) = n - \text{rang}(A - \lambda I)$

algebraische Vielfachheit

die algbr. vielfachheit eines EW λ ist die vielfachheit von λ als Nullstelle des char. Polynoms (quante volte λ appare come NS nel polinomio caratteristico)

$\forall EW: \text{geom. } V \leq \text{algbr. } V$ (geom V = algbr $V \Leftrightarrow$ A diagonalisierbar (= wenn A alle verschiedene EW hat))

eigenschaften falls A symm / herm

- alle EW sind reell
- kommen alle EV von verschiedene EW, dann sind sie orthogonal
- $\exists$ eine eigenbasis (Basis aus EV), die orthogonal ist
- für U unitär (= orthogonal in $\mathbb{C}$) gilt $U^H A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Berechnung der EV und EW

1) charact. polynom aufstellen $\text{chp}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
2) Nullstellen (= EW) bestimmen
3) EV berechnen $(A - \lambda_i I) v = 0$ oder $Av = \lambda_i v$

$Ax - \lambda x = 0$
$(A - \lambda I) x = 0$
$\det(A - \lambda I) = 0$
sd. esgibt nicht triviale lösung

d.h. berechnen maximal viele unabhängiger Lösungen durch nullsetzen aller freien Parametern ausser einem, den wir auf 1 setzen (wiederholen für alle parametern)

some free param = 1
all the rest = 0

⚠ non puoi usare gauss per trovare gli EW, altrimenti li cambi!

Eigenbasis basis aus EV

Ähnlichkeit A, B ähnlich (sim) wenn $A = TBT^{-1}$, $B = T^{-1}AT$

$\rightarrow$ dann A, B haben gleiche spur (traccia), Det und EW

zu A gibt es eine ähnliche diagonalmatrix D gdw. $\exists$ eigenbasis von A (genau dann wenn)

Eigenwertzerlegung (Spektralzerlegung)

Zu A gibt es die ähnliche diagonalmatrix Λ genau dann, wenn es eine eigenbasis von A gibt. Für diese basis V gilt

$AV = V\Lambda$ $\quad A = V\Lambda V^{-1}$

V: matrix with EV as columns
Λ: diag matrix with EW as diagonal

A heisst diagonalisierbar, falls Λ eine diag. matrix ist

computing the power of matrix $y = A^k x$

1) find EV, EW $\rightarrow$ put them in V, Λ so that $A = V\Lambda V^{-1} \rightarrow A^k = V\Lambda^k V^{-1}$ $(\Lambda = V^{-1} A V)$
2) solve $Vz = x$ for z (using gauss) $(z = V^{-1}x)$
3) compute Λ^k, then $w := \Lambda^k z$
4) compute $y = Vw$ $(= V\Lambda^k z = V\Lambda^k V^{-1} x)$

note: if A symmetric, compute V orthonormal, such that $V^T = V^{-1}$ (simpler step 2)

Spur (trace)

die spur von A ist gleich der summe der diagonalelemente von A

Spezialfall for chp(λ)

$n=2$: $\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$
$n=3$: $\text{chp}(\lambda) = \lambda^3 - \text{spur}(A)\lambda^2 + (\det A_1 + \det A_2 + \det A_3)\lambda - \det(A)$

⚠ non confondere A in triangolare forma, usalo diretto

A_i: 2×2 matrix A without row & column i

Funktionen von Matrizen

anwenden einer funktion: $f(\Lambda) := \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) = V f(\Lambda) V^{-1}$

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

e-funktion $e^A = V \cdot e^\Lambda V^{-1}$ $\quad e^\Lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Anwendung der EW zerlegung

schema für homogene, lineare DGL

gegeben ist ein system erster ordnung: mit anfangs bedingungen:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) & y_1(0) &= \gamma_1 \\ y_2'(t) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + \dots + a_{2n} y_n(t) & y_2(0) &= \gamma_2 \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1} y_1(t) + a_{n2} y_2(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) & y_n(0) &= \gamma_n \end{aligned}$$

Schreibe das system um $y'(t) = Ay(t)$

und erstelle die EW zerlegung von $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\underbrace{V^{-1} y'(t)}_{z'(t)} = \underbrace{V^{-1} A V}_{\Lambda} \underbrace{V^{-1} y(t)}_{z(t)} \longrightarrow z'(t) = \Lambda z(t)$$

das durch substitution entstandene system $z'(t) = \Lambda z(t)$ hat die allgemeine lösung

$z_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}$ ⋮ $z_n(t) = \gamma_n e^{\lambda_n t}$ $\Leftrightarrow z(t) = e^{t\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}}_{c} \Leftrightarrow z(t) = c \cdot e^{t\Lambda}$

die allgemeine Lösung lautet jetzt: $\boxed{q(t) = Vz(t) = V e^{t\Lambda} c}$

8 SINGULARWERT ZERLEGUNG (SVD)

Sei A eine "hohe" mxn matrix, mit $m \geq n$ und $Rang(A) = n$ (m × n, r = n)
So ist die matrix A^TA symmetrisch, positiv definit und invertierbar. So lässt sich A^TA in EW und EV zerlegen.

$\boxed{A^TA = V\Lambda V^T}$ ($V^T = V^{-1}$ ⇔ V orthogonal)

wobei $\Lambda = \Sigma\,\Sigma = \Sigma^2$ da $\Sigma = \sqrt{\Lambda}$ diagonal matrix ($\sigma^2 = \lambda$)

$A^TA = V\Sigma\Sigma V^T$ umgeformt $(AV\Sigma^{-1})^T \cdot (AV\Sigma^{-1}) = I$

U^T U

$\boxed{U = AV\Sigma^{-1}}$ ist eine orthogonale mxm matrix

Die singularwertzerlegung der matrix A ist nun folgendermasse definiert

$AV = U\Sigma \Rightarrow \boxed{A = U\Sigma V^T}$

V: EV von A^TA ($n \times n$): ON basis of $C(A^T)$ = row space
$\Sigma = \sqrt{\Lambda}$ Λ EW von A^TA

U: EV von AA^T ($m \times m$): ON basis of $C(A)$ = col space

mine: vorlaggi: any matrix decomp (not only square)
solves problem { EV rarely orthogonal; not always enough EV; matrix only square allowed }

uses 2 sets of EV: U's (AA^T) = col space | V's (A^TA) = row space | since A^TA, AA^T symmetric, EV can be chosen orthogonal (singular vectors)

σ are all positive (are r in total)

the matrices U,V contain ON bases for all 4 subspaces:

V { first r columns: row space; last n−r " : null space } liefern

U { first r columns: col space (bild/image); last m−r " : left nullspace }

$A = U \Sigma V^T$ ($m \times n = m \times m \cdot m \times n \cdot n \times n$)

$= U_1\sigma_1 V_1^T + \dots + U_r\sigma_r V_r^T$

$U = [u_1 | \dots | u_m]$
$V = [v_1 | \dots | v_n]$
$\Sigma = \begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$ (m × n)

Rezept:
- calcula EV v, EW σ^2 di A^TA
- agni $U = \frac{Av}{\sigma}$
- aggiungi giusta # di zeri pe row/column ⚠ completare missing (m−r) columns of U
- find missing U by solving $A^Tx = 0$. then $u = \frac{x}{\|x\|}$

Rank: rank of A = # of non zero singular values = # of non zero diagonal elements of Σ

9 ENDLICH ARITHMETIK

IEEE floating point standard

single precision (32 bit): 1 | 8 | 23 — sign | exponent (biased) | mantissa
double precision (64 bit): 1 | 11 | 52

Umwandlung IEEE → Dec

Single: $a = (-1)^s \cdot 2^{e-127} \cdot 1,m$
double: $a = (-1)^s \cdot 2^{e-1023} \cdot 1,m$

es: $m = [0,100100\dots]_2 = [\frac{1}{4} + \frac{1}{32}]_{10} = 0,28125$

Umwandlung Dec → IEEE
simply think about it!

Ausnahmen:

	m=0	m≠0
e=255	± ∞	NaN
e=0	∅	$a = (-1)^s \cdot 2^{-126} \cdot 0,m$

↳ denormalisierte zahlen

normalisiert: m = 1, …

Maschinengenauigkeit (precisione macchina)
Kleinste zahl für die gilt $\boxed{\epsilon_+ 1 \neq 1}$
↳ $eps = \frac{b}{2} \cdot b^{-p}$ (b = base, p = precision; es: binary = 2)
single: 2^{-24} double: 2^{-53} in binario = 2^{-p}
= bits for mantissa +1

m := kleinste normalisierte positive Maschinenzahl
$\overline{m}$:= " denormalisierte " "
$m \cdot eps = \overline{m}$

Absoluter/relativer Fehler
$e_{abs} = |\hat{c} - c|$
$e_{rel} = \frac{e_{abs}}{|c|}$

Auslöschung (precisione, quanto viene eliminato)
Bei subtraktion fast gleich grosse zahlen wird das Ergebnis falsch.
Bsp. 4-stellig arithmetik:
$\pi - 3,141 = 5,927 \cdot 10^{-4}$ (correct)
$3,142 - " = 1,00 \cdot 10^{-3}$ (machine, wrong)

Kahan-Summation
mit hilfe von Kahan kann man den Summations fehler minimieren.
Die summe $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ berechnet sich wie folgt, wobei
⊖, ⊕ fehlerbehaftete (errore) −, + darstellen
Initialisierung: $s_1 := x_1$, $c_1 := 0$

$Y = x_j \ominus c_{j-1}$
$T = s_{j-1} \oplus Y$
$c_j = (T \ominus s_{j-1}) \ominus Y$
$s_j = T$
} für j = 2, …, n

10 APPENDIX

Horner-Schema

Idee: Alg zur auswertung (valutaz) eines Polynoms
Bsp: $x^3 + 4x + 6$ an Stelle x=2 lässt sich auch schreiben als

	1	0	4	6
x	↓ +	x	x	$4x + x^3$
	1	x	$4 + x^2$	$6 + 4x + x^3$

(modified ruffini)

$((1)x + 0)x + 4)x + 6$ ergebnis: 22

Reguläre Matrizen

Ist A regulär, dann sind folgende aussagen äquivalent:
- A hat vollen Rang
- $\det(A) \neq 0$
- A ist invertierbar
- Alle zeilen/spalten vektoren lin. unabhängig
- 0 ist kein EW von A
- $\ker(A) = 0$
- $Ax = b$ besitzt genau 1 lösung.

Matrix exponentialfunktion

$e^A = I + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ $= Ve^DV^{-1}$ falls A diagonalisierbar

#prim 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, …

A. MATLAB

Machmengenauigkeit	eps
Transponieren	$A^T \rightarrow A'$
Bereich	x = anfang : schritt : ende
Betrag	abs(x)
LR-Zerlegung	A = LU , [L,U,P] = lu(A)
Cholesky-Zerlegung	A = R'.R R = chol(A)
EW-Zerlegung (EV und EW)	[V,D] = eig(A)
Determinante	det(A)
Singulärwertzerlegung (U, Σ, V)	[S,V,D] = svd(A)
nxn matrix mit alle 1	ones(n)
" " 0	zeros(n)
nxn einheitsmatrix (I_n)	eye(n)
|a|, elementweise bei matrix	abs(a)
größe einer matrix	[m,n] = size(A)
Vektornorm	norm(x)
p-Norm	norm(x,p)
∞-Norm	norm(x,inf)
Unteres / Oberes dreiecksfaktor (incl. diag)	tril(A), triu(A)
Inverses von A	A^-1 = inv(A)
Lösung von Ax=b	x = A\b
Diagonale von A	diag(A)
Spur von A	sum(diag(A))
a : $\frac{a-b}{n}$: b ⟷	v = linspace(a,b,n)
setze X und Y achsen manuell	axis([a,b,c,d])
hält den aktuellen plot	hold on / hold off
= B plot(cosx, sinx)	plot(x,y)
Plotet φ gegen r(φ)	polar(φ, r(φ))
Wandelt polar → cart coordinaten	pol2cart(φ,r)
cart → kugel "	cart2sph(x,y,z)

⚠ don't forget ;

Syntax

Operator	Meaning
.+ .- .* ./ .^	elementweise operatoren
+ - * / ^	matrix addition, mult, ...
A'	A^H
> < >= <= ~= ==	vergleich operatoren
&& ||	boolean operatoren

```
for i=1:5
end

while (a < A)
end

if (x==1)
elseif (x==2)
else
end

function [a,b] = name(arg1, arg2)      % arg 1,2 = inputs
return;                                %  a,b = outputs
end
                % optional
                % optional

function summe = test1(A)              % if you do not put [] parenthesis,
[m,n] = size(A)                        % the output is printed to console
summe = 0;              % initialize   % and not saved in a variable
for i=1:m               % row
for j=1:n               % column
summe = summe + A(i,j);
end
```

⚠ matlab indexes start at 1

Gram-Schmidt alg + QR

```
function [Q,R] = gschmidt(V)
    % input: V is mxn matrix with full rank (m<=n)
    % output: R mxn upper triangular matrix
              Q mxm unitary (orthogonal) " such that V=QR
[m,n] = size(V);
R = zeros(n);
R(1,1) = norm(V(:,1));
Q(:,1) = V(:,1)/R(1,1);
for k=2:n
    R(1:k-1,k) = Q(:,1:k-1)' * V(:,k);
    Q(:,k) = V(:,k) - Q(:,1:k-1) * R(1:k-1,k);
    R(k,k) = norm(Q(:,k));
    Q(:,k) = Q(:,k)/R(k,k);
end
```

STRANG

Linear algebra in a nutshell (matrix A is nxn)

nonsingular	singular
A is invertible	A is not invertible
The columns are independent	The columns are dependent
rows "	rows "
The determinant is not zero	The determinant is zero
Ax=0 has one solution x=0	Ax=0 has infinitely many solutions
Ax=b " $x=A^{-1}b$	Ax=b " or 0 solutions
A has n (nonzero) pivots	A has r<n pivots
A has full rank r=n	A has rank r<n
The reduced row echelon form is R=I	R has at least one zero row
The column space is all of $\mathbb{R}^n$	The column space has dimension r<n
row " $\mathbb{R}^n$	row " r<n
All EV are nonzero	Zero is EV of A
A^TA is symmetric positive def	A^TA is only semidefinite
A has n (positive) sing. values	A has r<n singular values

Table of EW and EV

how are the properties of a matrix reflected in EW and EV

	form	EW	EV
Symmetric	$A^T=A$	real λ's	orthogonal $x_i^Tx_j=0$
Orthogonal	$Q^T=Q^{-1}$	all $\|\lambda\|=1$	" $\bar{x}_i^Tx_j=0$
Skew-symmetric	$A^T=-A$	imaginary λ's	" "
Complex hermitian	$\bar{A}^T=A$	real λ's	" "
Positive definite	$x^TAx>0$	all $\lambda>0$	" since $A^T=A$
Markov	$m_{ij}>0$, $\sum_{i=1}^n m_{ij}=1$	$\lambda_{max}=1$	steady state $x>0$
Similar	$B=M^{-1}AM$	$\lambda(B)=\lambda(A)$	$x(B)=M^{-1}x(A)$
Projection	$P=P^2=P^T$	$\lambda=1;0$	column space, nullspace
Plane rotation		$e^{i\theta}$ and $e^{-i\theta}$	$x=(1,i)$ and $(1,-i)$
Reflection	$I-2uu^T$	$\lambda=-1;1,\dots,1$	u; whole plane $u^\perp$
Rank one	uv^T	$\lambda=v^Tu;0,\dots,0$	u; " $v^\perp$
Inverse	A^{-1}	$1/\lambda(A)$	keep eigenvectors of A
Shift	$A+cI$	$\lambda(A)+c$	"
Stable powers	$A^n\rightarrow 0$	all $\|\lambda\|<1$	any EV
Stable exponential	$e^{At}\rightarrow 0$	all $Re\,\lambda<0$	"
Cyclic permutation	row 1 of I last	$\lambda_k=e^{2\pi ik/n}$	$x_k=(1,\lambda_k,\dots,\lambda_k^{n-1})$
Tridiagonal	-1,2,-1 on diagonals	$\lambda_k=2-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$	$x_k=(\sin\frac{k\pi}{n+1},\sin\frac{2k\pi}{n+1},\dots)$
Diagonalizable	$A=S\Lambda S^{-1}$	diagonal of Λ	columns of S are independent
Symmetric	$A=Q\Lambda Q^{-1}$	" (real)	Q are orthonormal
Schur	$A=QTQ^{-1}$	diagonal of T	Q if $AA^T=A^TA$
Jordan	$J=M^{-1}AM$	diagonal of J	each block gives $x=(0,\dots,1,\dots,0)$
Rectangular	$A=U\Sigma V^T$	$rank(A)=rank(\Sigma)$	EV of A^TA, AA^T in V,U

LU factorization using gaussian elimination (no pivoting)

```
function [L,A] = LU_factor(A)
    % input:  A is nxn matrix, factored as A=LU
    % output: L is lower triangular matrix (1's on diagonal)
              U is upper triangular, stored in original A (must be zeroed out b
                                                          set U)
[m,n] = size(A);
L = eye(n);
for k = 1:n
    if (A(k,k)==0) Error('Pivoting is needed'); end
    L(k+1:n,k) = A(k+1:n,k) / A(k,k);
    for j=k+1:n
        A(j,:) = A(j,:) - L(j,k) * A(k,:);
    end
end
```

Cardano formula

solution to $ax^3+bx^2+cx+d=0$ is

$$\alpha=\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right) \qquad x=\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^3}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^3}}-\gamma$$

$$\beta=\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right) \qquad \gamma=\left(\frac{b}{3a}\right)$$

Linear least squares - Derivation directly in terms of matrices

The normal equations can be derived directly from a matrix representation of the problem as follows. The objective is to minimize

$$S(\beta)=\|y-X\beta\|^2=(y-X\beta)^T(y-X\beta)=y^Ty-\beta^TX^Ty-y^TX\beta+\beta^TX^TX\beta$$

that leaves

$$S(\beta)=y^Ty-2\beta^TX^Ty+\beta^TX^TX\beta \qquad \text{since} \quad \beta^TX^Ty=y^TX\beta$$

Differentiating this with respect to β and equating to zero to satisfy the 1st order conditions gives

$$-X^Ty+(X^TX)\beta=0$$

which is equivalent to the above given normal equations. A sufficient condition for satisfaction of the 2nd order conditions for a minimum is that X have full column rank, in which case X^TX is positive definite.

Analitic := just use the letters !